جامعة البعث   تحليل عقدي /1/   اسم الطالب :

(١)

كلية العلوم – قسم الرياضيات   الفصل الأول للعام الدراسي 2013-2014

أجب عن الأسئلة الآتية (13+12+10+15+15+10+15+10=100درجة)

1"- أوجد الجذور التكعيبية بالشكل $a+ib$ حيث $a,b\in R$ للعدد العقدي $4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}$.

2"- إذا علمت أن $z_1=1+2i$ هو أحد جذور المعادلة $z^4-3z^3+8z^2-7z+5=0$

فأوجد الجذور الثلاثة الباقية .

3"- إذا كان $f(z)=\dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$ عندما $z\neq i$ فعرف هذه الدالة عند

$z=i$ لتصبح هذه الدالة مستمرة عندها .

4"- إذا كان $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\,6x(2y-1)$ و $f(0)=3-2i$ فاحسب $f(1+i)$.

5"- إذا كان $z=x+iy$ و $u+iv=\tan z$ فأثبت أن

$$u=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+ch2y} \quad \text{و} \quad v=\frac{sh2y}{\cos 2x+ch2y}$$

6"- إذا كان $\log z=Logr+i\theta$ حيث $(r>0,\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{8\pi}{3})$ فاحسب

$\log(-1+i)^2$ و $2\log(-1+i)$ ثمّ قارن بينهما .

7"- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=-1,z_2=i,z_3=1$ فوق النقاط

$\omega_1=-1,\omega_2=\frac{4+3i}{5},\omega_3=1$ ثمّ أوجد خيال $|z|\leq 1$ وفق التحويلة الناتجة .

8"- أوجد خيال $(0\leq x,0\leq y\leq 2)$ وفق التحويلة $\omega=\dfrac{1}{z}$.

انتهت الأسئلة   أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الثاني [13] درجة توزع كما يلي

2 $\begin{cases} 4\sqrt{2}+i\,4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(1+i) \\ 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ 4\sqrt{2}+i4\sqrt{2} = 8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ درجتان

2 $\left(4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right] \quad k=0,1,2$

من أجل $k=0$ يكون

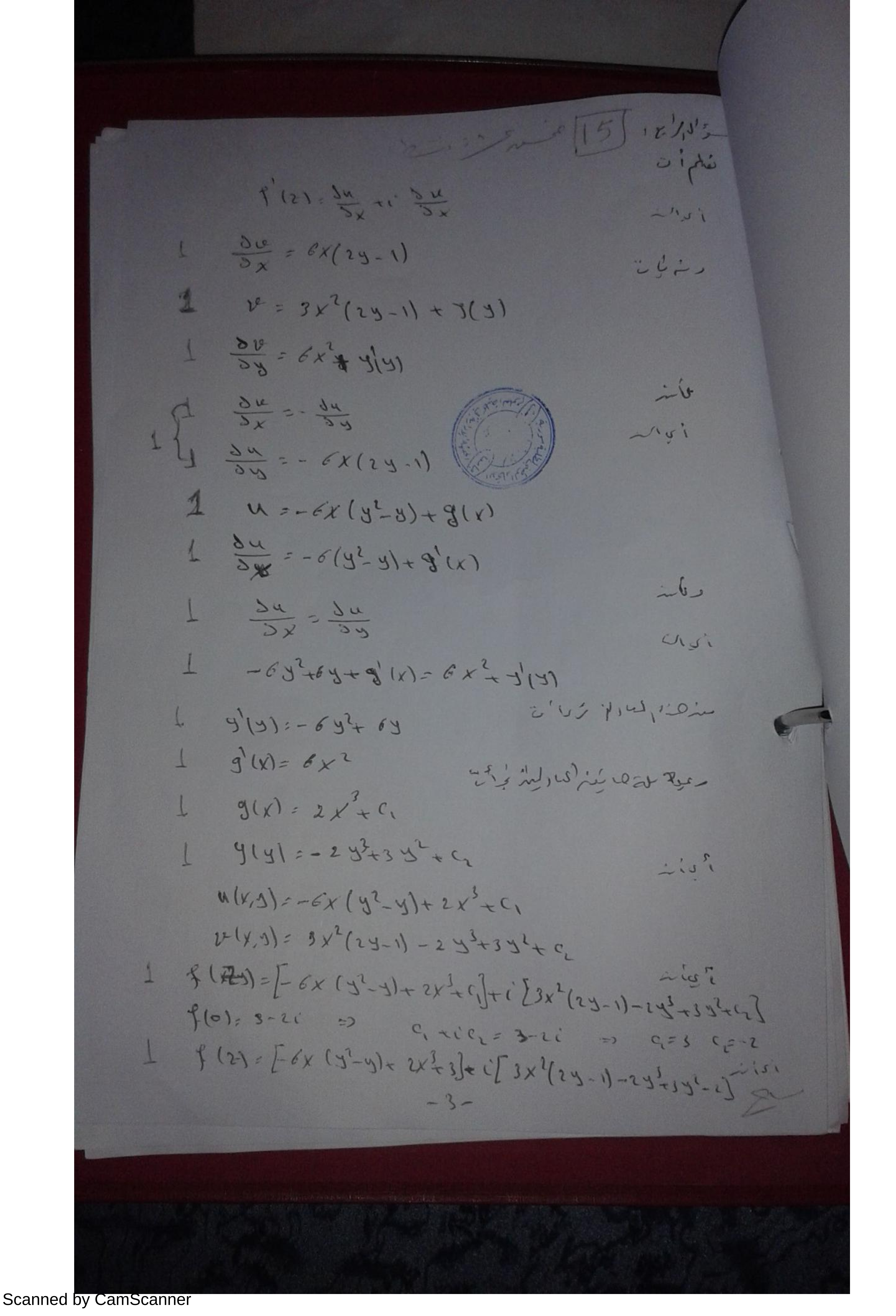
3 $\begin{cases} z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ = 2\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right] = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

من أجل $k=1$ يكون

3 $\begin{cases} z_1 = 2\left[\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right] = 2\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4} \\ = 2\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \end{cases}$

من أجل $k=2$ يكون

3 $\begin{cases} z_2 = 2\left[\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right] \\ = 2\left[\cos\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)\right] = 2\left[-\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right] \\ = 2\left[-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right] = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



15

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

1 $\frac{\partial v}{\partial x} = 6x(2y-1)$

1 $v = 3x^2(2y-1) + \gamma(y)$

1 $\frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 + \gamma'(y)$

1 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6x(2y-1) \end{array} \right.$

1 $u = -6x(y^2-y) + g(x)$

1 $\frac{\partial u}{\partial x} = -6(y^2-y) + g'(x)$

1 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

1 $-6y^2+6y+g'(x) = 6x^2 + \gamma'(y)$

1 $\gamma'(y) = -6y^2 + 6y$

1 $g'(x) = 6x^2$

1 $g(x) = 2x^3 + c_1$

1 $\gamma(y) = -2y^3 + 3y^2 + c_2$

$u(x,y) = -6x(y^2-y) + 2x^3 + c_1$

$v(x,y) = 3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 + c_2$

1 $f(z) = [-6x(y^2-y) + 2x^3 + c_1] + i[3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 + c_2]$

$f(0) = 3-2i \Rightarrow c_1 + ic_2 = 3-2i \Rightarrow c_1 = 3 \quad c_2 = -2$

1 $f(z) = [-6x(y^2-y) + 2x^3 + 3] + i[3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 - 2]$

جواب السؤال الثاني: [12] اثنا عشرة درجة

بما أن $z_1=1+2i$ جذر للمعادلة نستنتج
2 $z_2=1-2i$ جذراً أيضاً
جذر المعادلة مباشرة

$$(z-z_1)(z-z_2)=(z-1-2i)(z-1+2i)$$
2
$$=z^2-2z+5$$

فتكتب المعادلة المعطاة بالشكل

2 $(z^2-2z+5)(z^2-z+1)=0$

إما $z^2-2z+5=0 \Leftarrow$

$z_1=1+2i$

$z_2=1-2i$

أو $z^2-z+1=0$ ومنه

1

1 $\Delta=1-4=-3=3i^2$

2+2 $z_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ $\quad z_4=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

وهي جذور المعادلة المعطاة

جواب السؤال الثالث: [10] عشر درجات

تكون الدالة مستمرة عند z_0 إذا وفقط إذا كان

2 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}=\frac{3+2i-8-2i+5}{i-i}$$
3
$$=\frac{0}{0}$$

عدم تعيين
نزيل عدم التعيين باستخدام أوبيتال

2 $\lim_{z\to i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{12z^3-6z^2+16z-2}{1}=-12i+6+16i-2$

1 $=4+4i$

أي أن الدالة

$$f(z)=\begin{cases}\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i} & z\ne i \text{ عندما} \\ 4+4i & z=i \text{ عندما}\end{cases}$$
2

تصبح الدالة مستمرة عند $z=i$

تعويض

1 $\begin{cases} f(1+i) = [-6(1)(1-1) + 2\times 3] + i[3(2-1) - 2\times 3 - 2] \\ f(1+i) = 5 + 2i \end{cases}$

جواب السؤال الرابع: [15] درجة

نبرهان

1 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{\sin x \, ch y + i \cos x \, sh y}{\cos x \, ch y - i \sin x \, sh y}$

1 $\dfrac{[\sin x \, ch y + i \cos x \, sh y][\cos x \, ch y + i \sin x \, sh y]}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y}$

1+1 $= \dfrac{\sin x \cos x \, ch^2 y - \sin x \cos x \, sh^2 y}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y} + i \dfrac{\sin^2 x \, ch y \, sh y + \cos^2 x \, sh y \, ch y}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y}$

1+1 $\tan z = \dfrac{\sin x \cos x (ch^2 y - sh^2 y)}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y} + i \dfrac{sh y \, ch y (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y}$ اذن

1+1 $= \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x (1 + sh^2 y) + \sin^2 x \, sh^2 y} + i \dfrac{sh y \, ch y}{\cos^2 x (1 + sh^2 y) + \sin^2 x \, sh^2 y}$

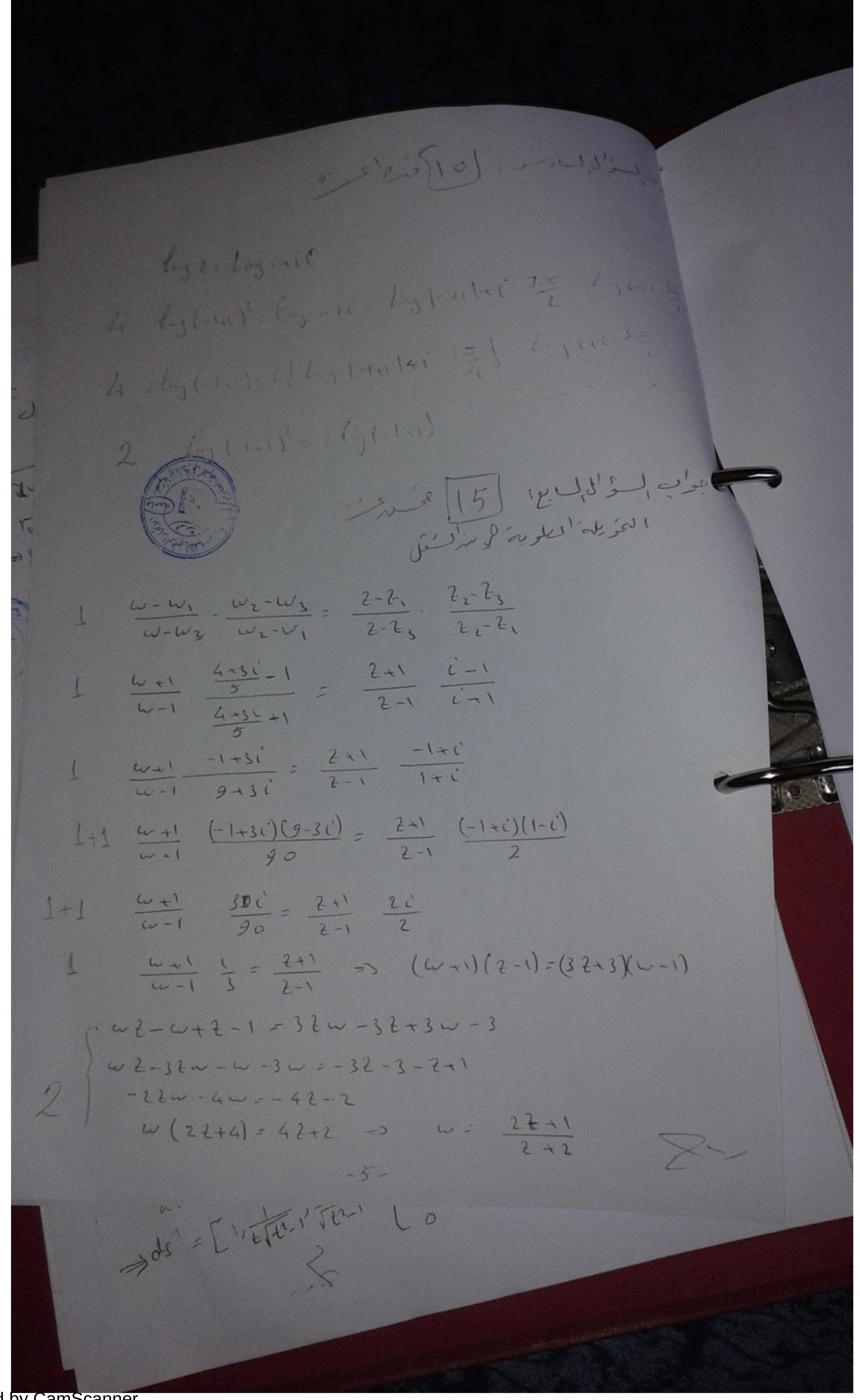
1+1 $= \dfrac{\frac{1}{2} \sin 2x}{\cos^2 x + sh^2 y} + i \dfrac{\frac{1}{2} sh 2y}{\cos^2 x + sh^2 y}$

1 $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ نأخذ

1 $sh^2 y = \dfrac{-1 + ch 2y}{2}$

1 $\tan z = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + ch 2y} + i \dfrac{sh 2y}{\cos 2x + ch 2y}$ نعوض ينتج

1+1 $u = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + ch 2y}$ $\quad v = \dfrac{sh 2y}{\cos 2x + sh 2y}$ أي ان



جواب السؤال الرابع [15] خمسة عشر

1 $\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

1 $\frac{w+1}{w-1} \frac{\frac{4+3i}{5}-1}{\frac{4+3i}{5}+1} = \frac{z+1}{z-1} \frac{i-1}{i+1}$

1 $\frac{w+1}{w-1} \frac{-1+3i}{9+3i} = \frac{z+1}{z-1} \frac{-1+i}{1+i}$

1+1 $\frac{w+1}{w-1} \frac{(-1+3i)(9-3i)}{90} = \frac{z+1}{z-1} \frac{(-1+i)(1-i)}{2}$

1+1 $\frac{w+1}{w-1} \frac{30i}{90} = \frac{z+1}{z-1} \frac{2i}{2}$

1 $\frac{w+1}{w-1} \frac{1}{3} = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow (w+1)(z-1) = (3z+3)(w-1)$

2
$wz - w + z - 1 = 3zw - 3z + 3w - 3$
$wz - 3zw - w - 3w = -3z - 3 - z + 1$
$-2zw - 4w = -4z - 2$
$w(2z+4) = 4z+2 \Rightarrow w = \frac{2z+1}{z+2}$

التحويلة العكوسية

بما أن $w = \frac{2z+1}{z+2}$ $\Leftarrow$ $z = \frac{-2w+1}{w-2}$ 1

$|z| = \frac{|-2w+1|}{|w-2|}$ بما أن $|z| \leq 1$ نوجد

بفرض أن $w = u + iv$ [illegible]

$|-2w+1| \leq |w-2|$

$|(-2u+1) - 2iv| \leq |(u-2) + iv|$

$(-2u+1)^2 + 4v^2 \leq (u-2)^2 + v^2$

$4u^2 - 4u + 1 + 4v^2 \leq u^2 - 4u + 4 + v^2$

$3u^2 + 3v^2 \leq 3 \Rightarrow u^2 + v^2 \leq 1$

إذاً هذه التحويلة الثانية تنقل دائرة الوحدة [illegible] إلى داخل دائرة الوحدة $|w| \leq 1$

حل السؤال الثاني $\boxed{10}$ نقاط عشرة

بفرض أن $z = x + iy$ و $w = u + iv$ [illegible] 1

1+1 $w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow x + iy = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$

أي أن

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$ $\qquad$ $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$

بما أن $0 \leq x$ [illegible] $\Leftarrow 0 \leq \frac{u}{u^2+v^2}$ $0 \leq u$ 1

وبما أن $0 \leq y \leq 2$ [illegible] $0 \leq -\frac{v}{u^2+v^2} \leq 2$ 1

[illegible] $\Leftarrow 0 \leq -\frac{v}{u^2+v^2}$ $\Leftarrow 0 \leq -v$ $0 \geq v$ 1

و $-\frac{v}{u^2+v^2} \leq 2 \Leftarrow -v \leq 2(u^2+v^2)$ 1

$u^2 + v^2 + \frac{1}{2}v \geq 0 \Rightarrow u^2 + (v+\frac{1}{4})^2 \geq \frac{1}{16}$ 1

2 إذاً [illegible] $0 \leq u$ و $0 \geq v$ و $u^2 + (v+\frac{1}{4})^2 \geq \frac{1}{16}$

مدرس المادة
د. [illegible]

[illegible]

$\frac{ds}{dt} = [1, \frac{u}{dt}$ $\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}]$

$\Rightarrow ds = [1, \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}]$